УДК 517.983.54

В. В. Васин

МЕТОД КВАЗИРЕШЕНИЙ ИВАНОВА И ЕГО ЭФФЕКТИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ*

Введение

Метод квазирешений наряду с методом регуляризации Тихонова является мощным средством решения некорректно поставленных задач и широко используется в прикладных исследованиях. Привлекательным свойством этого метода является тот факт, что наличие информации о принадлежности решения (квазирешения) компактному множеству позволяет решить вопрос о существовании решения и избежать задания уровня погрешности как в методе невязки или выбора параметра регуляризации как в методе Тихонова.

Метод квазирешений для операторного уравнения первого рода $Au = f$ предложен В. К. Ивановым в работе [1], а в [2] дано развернутое изложение результатов, относящихся к этому методу.

Первоначально метод квазирешений был сформулирован для линейного непрерывного оператора в нормированных пространствах [1, 2] и установлена его связь с методом регуляризации Тихонова [3]. Затем он был обобщен на случай замкнутого оператора, действующего в топологических пространствах [4, 5]. В упомянутых работах В. К. Ивановым рассмотрены не только вопросы корректности метода квазирешений в различных нормированных пространствах, но предложена и обоснована схема конечномерной аппроксимации метода на основе расширяющихся компактов. Кроме того, при задании априорного множества гильбертова пространства в виде $M = \{u : \|u\| \leqslant r\}$ было получено явное представление решения в форме ряда Фурье по ортонормированному базису собственных векторов оператора A^*A. В некоторых задачах спектр вполне непрерывного оператора A^*A и собственные элементы могут быть явно вычислены, следовательно, в этом случае квазирешения эффективно строятся для точных и приближенных данных, как это продемонстрировано на содержательных примерах в [2, 3]. Однако когда спектр оператора неизвестен, то численное построение квазирешения существенно осложняется, поскольку нахождение собственных векторов оператора A^*A

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00116).

(или его матричных аппроксимаций) является неустойчивой проблемой для малых собственных значений.

Дальнейшие исследования учеников В. К. Иванова и его последователей показали, что в проблеме приближенного построения квазирешений можно существенно расширить класс эффективных алгоритмов, привлекая, в частности, методы, развитые для некорректных задач с априорной информацией.

Статья состоит из трех разделов. В разделе 1 представлены необходимые определения и основные свойства квазирешений. В разделе 2 метод квазирешений рассматривается с позиций решения операторного уравнения с априорной информацией, что позволяет построить новые эффективно реализуемые алгоритмы аппроксимации квазирешений. В разделе 3 излагается общая схема дискретной аппроксимации метода квазирешений, которая включает проекционные методы, конечно-разностные схемы, методы типа коллокаций. Материал этого раздела обобщает результаты В. К. Иванова по конечномерной аппроксимации квазирешений.

1. Метод квазирешений

1.1. Пусть U, F – банаховы пространства, A – линейный непрерывный оператор такой, что A^{-1} существует, но неограничен. В этом случае решение операторного уравнения

$$Au = f \tag{1.1}$$

при заданных операторе A и правой части f относится к классу некорректно поставленных задач: вследствие неограниченности A^{-1} решение существует не для всех f и неустойчиво относительно возмущений исходных данных A, f.

По-видимому, впервые А. Н. Тихонов [6] обратил внимание на тот факт, что устойчивость уравнения можно восстановить, если искать решение на компактном множестве $M \subset U$. Тогда, согласно известной топологической теореме Хаусдорфа, отображение A^{-1} непрерывно на $N = AM$. Таким образом, если $f \in N$ и вариации f не выводят этот элемент из N, то решение u будет непрерывно зависеть от f и A. Оценка устойчивости решения относительно вариаций правой части определяется модулем непрерывности обратного оператора A^{-1} на N:

$$w(\delta) = \sup\{\|u\| : u \in M, \|Au\| \leqslant \delta\}.$$

В случае гильбертовых пространств и самосопряженного неотрицательно определенного оператора A в работе [7] М. М. Лаврентьевым был предложен устойчивый способ построения приближенного решения с помощью регуляризованного уравнения

$$u^\alpha = Bv_\alpha, \quad v_\alpha: \quad ABv + \alpha v = f_\delta,$$

где $u \in M = BS_1$, $S_1 = \{v : \|v\| \leqslant 1\}$; $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$; B – линейный вполне непрерывный оператор.

Из полученной им оценки

$$\|u - u^\alpha\| \leqslant w(\alpha) + \frac{\delta\|B\|}{\alpha}$$

следует сходимость регуляризованных решений $u^{\alpha(\delta)}$ при $\alpha(\delta) \to 0$, $\dfrac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0$.

Здесь $f \in N = AM$, однако приближенная правая часть f_δ не обязана принадлежать множеству $N = AM$, т. е. вариации правой части могут выводить решение за пределы множества M. Таким образом, снято ограничение, которое содержалось в подходе А. Н. Тихонова.

Необходимо отметить, что не существует эффективных критериев принадлежности $f \in M$, следовательно, может не существовать решения уравнения (1.1) на множестве M. Чтобы преодолеть эту трудность, В. К. Иванов ввел понятие квазирешения.

Определение 1.1. [1] *Будем называть квазирешением уравнения* (1.1) *на заданном компактном множестве M пространства U и при заданном f_0 такой элемент $u_0 \in M$, для которого невязка $\|Au - f\|$ достигает минимума на множестве M* :

$$\min\{\|Au - f_0\| : \quad u \in M\} = \|Au_0 - f_0\|. \tag{1.2}$$

В этом случае не только приближенная, но и точная правая часть f_0 не обязана принадлежать множеству $N = AM$, поэтому обычное решение может не существовать. Ясно также, что если $f_0 \in N$, то квазирешение совпадает с обычным решением.

Теорема 1.1. [1] *Пусть A – линейный непрерывный оператор, действующий на паре банаховых пространств U, F. Квазирешение уравнения* (1.1) *существует для любого непустого компактного множества $M \in U$ и любого $f \in F$. Если M выпукло, а сфера в пространстве F строго выпукла, то квазирешение единственно и непрерывно зависит от f, т. е. задача нахождения квазирешения корректна по Адамару.*

В дальнейшем В. К. Ивановым было получено более общее утверждение о корректности квазирешений. Приведем формулировку соответствующей теоремы.

Теорема 1.2. [4] *Пусть N – линейное топологическое пространство, F – E-пространство, A – линейный замкнутый оператор из $D(A) \subset U$ в F, $M = D(A) \cap K$, где K – выпуклое компактное множество. Тогда для каждого элемента f_0 из F существует единственное квазирешение u_0 на M, которое непрерывно зависит от f_0.*

В теоремах 1.1 и 1.2 утверждается, что квазирешение устойчиво относительно правой части f. В действительности непрерывная зависимость имеет место и от оператора A, как это следует из следующей теоремы.

Теорема 1.3. [8] *Пусть A, A_h – линейные непрерывные операторы из U в F и выполнено условие аппроксимации*

$$||A - A_h|| \leqslant h, \quad ||f_0 - f_\delta|| \leqslant \delta.$$

Пусть пространства U, F банаховы, кроме того, F строго выпукло, оператор A^{-1} существует. Пусть M – компактное множество из U.

Тогда квазирешения u_0, $u_\Delta(\Delta = (h, \delta))$ уравнения (1.1) для точных (A, f) и приближенных данных (A_h, f_δ) существуют, единственны и имеет место сходимость

$$\lim_{\Delta \to 0} ||u_\Delta - u_0|| = 0.$$

Следствие 1.1. *Если оператор A необратим и пространство F не обязательно строго выпукло, то для множеств квазирешений Q_0, Q_Δ справедливо соотношение*

$$\lim_{\Delta \to 0} \beta(Q_\Delta, Q_0) = 0, \quad \Delta = (\delta, h),$$

где β – полуотклонение Q_Δ от Q_0 (см. определение 3.3).

Таким образом, введение квазирешения позволяет решить две важные проблемы для некорректно поставленной задачи (1.1) – проблему существования решения (квазирешения) и проблему построения ругуляризованного семейства приближенных решений в условиях зашумленных данных.

Пусть U, F – гильбертовы пространства, A – вполне непрерывный оператор, множество $M = \{u \in U : ||u|| \leqslant R\}$, которое является слабым компактом в U. Обозначим через $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots$ систему собственных значений оператора A^*A, а через $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ – полную ортонормированную систему его собственных векторов. Пусть $A^*f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n$.

Теорема 1.4. [1] *Квазирешение уравнения* (1.1) *на множестве* M *выражается формулой*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [\beta_n/(\lambda_n + \lambda)] u_n, \tag{1.3}$$

где $\lambda = 0$, *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2/\lambda_n^2 \leqslant R^2$, λ *– положительный корень уравнения*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2/(\lambda_n + \lambda)^2 = R^2, \quad \textit{если} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2/\lambda_n^2 > R^2.$$

Если системы $\{\lambda_n\}$, $\{u_n\}$ могут быть получены в явном виде (аналитически), то представление (1.3) дает эффективный метод аппроксимации искомого квазирешения, если при вычислении частных сумм число удерживаемых членов подходящим образом связывать с уровнем погрешности исходных данных. Содержательные примеры, иллюстрирующие такую ситуацию, можно найти в [2, 3].

Однако если λ_n, u_n нам неизвестны и необходимо находить их численно, то положение существенно осложняется ввиду неустойчивости (к возмущениям оператора) задачи построения собственных векторов u_n оператора A^*A, соответствующих малым собственным значениям λ_n. В определенной степени эту трудность можно преодолеть, если привлечь регулярные методы построения базиса собственных подпространств, предложенных А. Л. Агеевым (см., например, [9]).

2. Итерационные методы аппроксимации квазирешений

2.1. Пусть U, F – гильбертовы пространства, A – линейный непрерывный оператор, действующий из U в F, M – выпуклое компактное (не обязательно в сильной топологии) множество. Существование обратного к A оператора не предполагается, поэтому квазирешение определяется в общем случае неоднозначно. Обозначим через Q множество квазирешений, т. е. множество решений задачи (1.2).

Тогда задача (1.2) эквивалентна решению операторного уравнения

$$u = P_M[u - \mu(A^*Au - A^*f)] \equiv T(u), \tag{2.1}$$

где P_M – метрическая проекция на множество M; μ – произвольный положительный параметр.

Действительно, необходимое условие экстремума в задаче (1.2) приводит к вариационному неравенству

$$\langle A^*Au - A^*f,\ u - v\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, v \in M, \tag{2.2}$$

откуда на основании критерия метрической проекции получаем (2.1).

Обратно, если $u = \overline{u}$ – решение вариационного неравенства (2.2), тогда

$$||Av - f||^2 - ||A\overline{u} - f||^2 = 2\langle A^*A\overline{u} - A^*f,\ v - \overline{u}\rangle +$$

$$+||A(v - \overline{u})||^2 \geqslant 0, \quad \forall\, v \in M,$$

т. е. в точке $\overline{u}$, реализуется минимум в задаче (1.2).

Кроме того, оператор T, определяемый (2.1), при $\mu \leqslant 2/||A||^2$ является нерастягивающим, т. е. выполнено неравенство

$$||T(u) - T(v)|| \leqslant ||u - v|| \quad \forall\, u, v \in U,$$

а также псевдосжимающим.

Определение 2.1. *Оператор $T\colon U \to U$ называется M-псевдосжимающим, если множество неподвижных точек $Fix(T) = M \neq \varnothing$ и для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение*

$$||T(u) - z|| \leqslant ||u - z||^2 - \nu||u - T(u)|| \quad \forall\, u \in U,\ u \notin M,\ \forall\, z \in M = Fix(T);$$

обозначаем этот класс через $\mathcal{P}_M^\nu$.

Таким образом, вместо задачи минимизации (1.2) можно оперировать эквивалентным ей уравнением (2.1). Это позволяет привлечь итерационные методы для решения уравнения (2.1) и, следовательно, для аппроксимации квазирешения уравнения (1.1).

Рассмотрим метод последовательных приближений для операторного уравнения (2.1)

$$u^{k+1} = P_M[u^k - \mu(A^*Au^k - A^*f)] \equiv T(u^k), \tag{2.3}$$

где параметр μ удовлетворяет неравенству $\mu \leqslant 2/||A||^2$.

Теорема 2.1. [9] *Пусть A – линейный непрерывный оператор, действующий на паре пространств U, F, а M – непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства U.*

Тогда процесс (2.3) *порождает итерационную последовательность* $\{u^k\}$, *которая слабо сходится к* $\widehat{x} \in Fix(T) = Q$, *т. е. некоторому квазирешению уравнения* (1.1) *на множестве* M, *причем справедливы следующие свойства:*

1) *либо* $||u^{k+1} - \widehat{u}|| < ||u^k - \widehat{u}||$ *для любого* k, *либо* $\{u^k\}$ *стационарна, начиная с некоторого номера* $\mathcal{N}$;

2) $\inf\limits_{z\in Q}\{\lim\limits_{k\to\infty} ||u^k - z||\} = \lim\limits_{k\to\infty} ||u^k - \widehat{u}||$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||u^{k+1} - u^k||^2 \leqslant ||u^0 - \widehat{u}||^2/\nu(\mu)$.

Следствие 2.1. *Если дополнительно* M *– компактное множество, то имеет место сильная сходимость итераций:* $\lim\limits_{k\to\infty} ||u^k - \widehat{u}|| = 0$.

Пусть теперь заданы приближенные данные задачи A_h, f_δ такие, что

$$||A_h - A|| \leqslant h, \quad ||f_\delta - f|| \leqslant \delta. \tag{2.4}$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$\widetilde{u}^{k+1} = P_M[\widetilde{u}^k - \mu(A_h^* A_h \widetilde{u}^k - A_h^* f_\delta)]. \tag{2.5}$$

Теорема 2.2. [9] *В условиях следствия* 2.1 *при выборе номера останова итераций* $k(h,\delta)$ *в соответствии с соотношением* $k(h,\delta)(\delta + h) \to 0$ *при* $\delta, h \to 0$ *имеет место сильная сходимость итераций* (2.5):

$$\lim_{\delta,h\to 0} ||\widetilde{u}^{k(\delta,h)} - \widehat{u}|| = 0.$$

Замечание 2.1. Если $M = \{u \in U : ||u - u^*|| \leqslant R\}$ (см. теорему 1.1), то оператор метрического проектирования P_M вычисляется по формуле

$$P_M(v) = u^* + \frac{v - u^*}{||v - u^*||}R.$$

Для M, заданного линейным неравенством $M = \{u \in U : \langle u, v\rangle - q \leqslant 0\}$, также имеет место явная формула

$$P_M(u) = u - \frac{(\langle u, v\rangle - q)^+ v}{||v||^2}.$$

В этих и других подобных случаях итерации в процессе (2.5) могут быть эффективно реализованы. Однако в общей ситуации при вычислении P_M необходимо дополнительно решать задачу выпуклой оптимизации.

Учитывая, что при $\mu \leqslant 2/||A||^2$ оператор шага в процессе (2.1) является нерастягивающим, можно модифицировать его с помощью корректирующих множителей Браудера–Гальперина [11, 12], чтобы получить сильную сходимость без предположения компактности множества M.

Определение 2.2. [12] *Числовая последовательность γ_i называется допустимой, если выполнены свойства:*

1) $0 < \gamma_i < 1$;
2) $\gamma_i < \gamma_{i+1}$;
3) $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = 1$;
4) *существует подпоследовательность номеров $n(i)$ такая, что $n(i+1) > n(i)$, а также*
5) $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_{i+n(i)} \cdot \varepsilon_i^{-1} = 1$;
6) $\lim\limits_{i\to\infty} n(i) \cdot \varepsilon_i = \infty$, *где* $\varepsilon_i = 1 - \gamma_i$.

Заметим, что такие последовательности существуют. Например, $\gamma_i = 1 - i^{-p}$, где $0 < p < 1$, является допустимой, причем подпоследовательность $n(i)$, фигурирующая в пунктах 4)–6), может быть выбрана в этом случае по формуле $n(i) = i^{\nu}$, $0 < p < \nu < 1$.

Рассмотрим итерационный метод

$$u^{k+1} = \gamma_k[P_M[u^k - \mu(A^*Au^k - A^*f)]] + (1-\gamma_k)v^0. \tag{2.6}$$

Теорема 2.3. *Пусть γ_k – допустимая последовательность, $\mu \leqslant 2/||A||^2$ и v^0 – произвольный элемент из выпуклого замкнутого ограниченного множества M. Тогда для любого начального приближения $v^0 \in M$ итерационный метод* (2.6) *сходится сильно к квазирешению уравнения* (1.1), *ближайшему к элементу v^0.*

По аналогии с нормальным решением, введенным А. Н. Тихоновым, назовем квазирешение, ближайшее к v^0, v^0-нормальным квазирешением.

Следствие 2.2. *При возмущенных данных A_h, f_δ с условиями аппроксимации* (2.4) *процесс* (2.6) *сильно сходится к v^0-нормальному квазирешению при выборе числа итераций $n(\delta, h)$ в соответствии с асимптотическим правилом останова $n(\delta, h)(\delta + h) \to 0$ при $\delta, h \to 0$.*

2.2. Если квазирешение совпадает с обычным решением уравнения (1.1) при точных данных, то его нахождение можно трактовать как решение задачи с априорной информацией, т. е. решение системы

$$Au = f, \quad u \in M. \tag{2.7}$$

В этом случае для решения задачи (2.7) применим аппарат фейеровских (псевдосжимающих) отображений [9, 10]. Основная идея здесь заключается в том, что строятся итерационные процессы вида

$$u^{k+1} = P_M U, \quad u^{k+1} = \lambda P_M(u^k) + (1-\lambda)U(u^k), \tag{2.8}$$

где $0 < \lambda < 1$, U – оператор шага некоторого базового итерационного метода с $Fix(U) = Q$ для аппроксимации решения уравнения (1.1), а P_M – M-псевдосжимающее (M – фейеровское) отображение с $Fix(P_M) = M$, которое конструктивно строится для широкого класса множеств M априорных ограничений.

Теорема 2.4. *Пусть уравнение* (1.1) *имеет непустое множество решений* Q, M *– выпуклое замкнутое множество априорных ограничений, причем* $M \cap Q \neq \varnothing$. *Пусть* $U \in \mathcal{P}_Q^{\nu_1}$, $P_M \in \mathcal{P}_M^{\nu_2}$ *и для каждого из этих операторов выполнено свойство*

$$x_i \rightharpoonup x \quad x_i - T(x_i) \to 0 \quad \Rightarrow \quad x \in Fix(T).$$

Тогда каждый из процессов (2.8) *слабо сходится к некоторому элементу* $\widehat{u} \in Q \cap M$, *т. е. решению системы* (2.7), *и для итераций выполнены свойства* 1)–3) *из теоремы* 2.3.

Следствие 2.3. *Если* M *– компактное множество и* P_M *– проекция с релаксацией (см.* [10]), *то итерации* (2.8) *сходятся сильно к* $\widehat{u} \in Q \cap M$.

Следствие 2.4. *Пусть множество* M *задано системой линейных неравенств в гильбертовом пространстве:* U

$$M = \{u : \ g_i(u) \equiv \langle u, v_i \rangle - q_i \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Образуем отображения

$$P_M^1(u) = P_m P_{m-1} \ldots P_1, \quad P_M^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i, \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \tag{2.9}$$

где $P_i(u) = u - (\langle u, v_i \rangle - q_i)^+ v/\|v\|^2$ является проекцией на полупространство, образованное i-м неравенством. Тогда при использовании в процессах (2.8) в качестве P_M каждого из отображений P_M^i $(i = 1, 2)$, определенных формулами (2.9), итерации $\{u^k\}$ образуют сильно сходящиеся последовательности к решению системы (2.7) (квазирешению уравнения (1.1)).

Это вытекает из того факта, что все итерации u^k содержатся в конечномерном пространстве, образованном элементами $\{u^0, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, что вместе со слабой сходимостью влечет сильную сходимость.

Следствие 2.5. *Если* P_M *и* U *– нерастягивающие отображения, то для модификаций процессов* (2.8) *с помощью корректирующих множителей подобно* (2.6) *справедливо заключение теоремы* 2.3.

Замечание 2.2. Следующие операторы шага итерационных методов являются псевдосжимающими и, следовательно, могут быть использованы в процессах (2.8) в качестве отображения U:

$$U(u) = u - \mu(A^*Au - A^*f), \quad \mu \leqslant 2/||A||^2$$

(метод простой итерации);

$$U(u) = (A^*A + \alpha I)^{-1}(\alpha u + A^*f), \quad \alpha > 0$$

(итерированный вариант метода Тихонова);

$$U(u) = u - \frac{||S(u)||^2}{||AS(u)||^2}S(u), \quad S(u) = A^*(Au - f)$$

(метод наискорейшего спуска);

$$U(u) = u - \frac{||A(u) - f||^2}{||S(u)||^2}S(u)$$

(метод минимальной ошибки).

В приложениях часто встречаются априорные ограничения в форме выпуклых неравенств

$$M = \{u : \ g_i(u) \leqslant 0, \ i = 1, 2, \dots, m\}$$

с (суб)дифференцируемыми функционалами g_i. Рассмотрим отображение [10]

$$P_M(u) = u - \lambda\frac{d(u)e(u)}{||e(u)||^2}, \quad 0 < \lambda < 2, \tag{2.10}$$

где $d(u) = \sum\limits_{i=1}^{m}[g^+(u)]^\mu, \ e(u) = \nabla d(u), \ \mu > 1$. Отображение P_M, определяемое формулой (2.10), является M-псевдосжимающим, поэтому может выступать в качестве оператора P_M в процессах (2.8).

3. Дискретная аппроксимация квазирешений

При численном построении квазирешений возникает необходимость перехода от бесконечномерной задачи (1.2) к некоторой конечномерной. В. К. Иванов [2] предложил аппроксимировать (1.2) последовательностью задач (метод Ритца)

$$\min\{||Au - f||^2 : \ u \in M_k\}, \tag{3.1}$$

где $\{M_k\}$ – последовательность вложенных конечномерных компактов

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k \subset M, \quad \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k} = M.$$

Определение 3.1. *Пусть C и D – множества из банахова пространства U. Полуотклонением $\beta(C, D)$ множества C от множества D называется*

$$\beta(A, B) = \sup_{u \in C} \inf_{v \in D} ||u - v||.$$

Напомним, что выше было введено обозначение Q для множества квазирешений задачи (1.2). Обозначим через Q_n множество квазирешений для задачи (3.1).

Теорема 3.1. [2]. *Пусть $A\colon U \to F$ – непрерывный (необязательно линейный) оператор, U, F – банаховы пространства. Тогда последовательность $\{Q_n\}$ β-сходится к Q, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \beta(Q_n, Q) = 0$.*

Заметим, что в качестве M_n можно принять $M_n = U_n \bigcap M$, где $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n} = U$.

Следует сказать, что конечномерная аппроксимация на основе подхода, изложенного выше, не приводит к полной дискретизации задачи (1.2), поскольку оператор A и правая часть не аппроксимируются. Ниже излагается общая схема дискретизации, которая позволяет обосновать практически все известные схемы, включая конечно-разностный метод, метод коллокаций, проекционный метод общего вида.

Для этой цели привлечем разработанный в [13, 15] аппарат, который основан на дискретной аппроксимации пространств, дискретной слабой и сильной сходимости элементов и операторов.

Ограничиваясь случаем гильбертовых пространств U, F, введем необходимые определения и изложим базовые свойства введенных понятий, которые нам понадобятся при формулировке теорем сходимости дискретных аппроксимаций.

Определение 3.2. *Последовательность гильбертовых пространств $\{U_n\}$ образует дискретную аппроксимацию гильбертова пространства U, если существует семейство $\mathcal{P} = \{p_n\}$ операторов $p_n\colon U \to U_n = p_n U$ со следующими свойствами:*

$$\forall\, u \in U \quad \lim_{n\to\infty} ||p_n u||_{U_n} = ||u||_U,$$

$$\forall\, u, u' \in U, \quad \forall\, a, a' \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} ||p_n(au + a'u') - ap_n u - a'p_n u'||_{U_n} = 0,$$

где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел; $\mathcal{P} = \{p_n\}$ называется семейством связанных операторов или операторов сужения.

Для упрощения записи в дальнейшем, как правило, будем опускать индексы при нормах.

Определение 3.3. *Пусть последовательность пространств $\{U_n\}$ образует дискретную аппроксимацию U с семейством связывающих операторов $\mathcal{P} = \{p_n\}$. Последовательность элементов $\{u_n\}, u_n \in U_n$, называется дискретно (сильно) сходящейся к $u \in U$ (обозначаем $u_n - \to u$), если*

$$\lim_{n\to\infty} ||p_n u - u_n|| = 0.$$

Определение 3.4. *Последовательность элементов $\{u_n\}$, $u_n \in U_n$, дискретно слабо сходится к $u \in U$ (обозначаем $u_n - \rightharpoonup u$), если выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n \rangle = \langle u, v \rangle$$

для любой дискретно (сильно) сходящейся последовательности $v_n - \to v$, здесь $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ – символ скалярного произведения в соответствующем пространстве.

Справедливы следующие свойства [13, 15]:

а) $a_n \to a,\ a'_n \to a',\ u_n - \to u,\ u'_n - \to u' \quad \Rightarrow \quad a_n u_n + a'_n u'_n - \to au + a'u'$;

б) $a_n \to a,\ a'_n \to a',\ u_n - \rightharpoonup u,\ u'_n - \rightharpoonup u' \quad \Rightarrow \quad a_n u_n + a'_n u'_n - \rightharpoonup au + a'u'$;

в) $u_n - \to u \quad \Leftrightarrow \quad u_n - \rightharpoonup u,\ \lim\limits_{n\to\infty} ||u_n|| = ||u||$;

г) $u_n - \rightharpoonup \quad \Rightarrow \quad ||u|| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \inf ||u_n||$;

д) $u_n - \rightharpoonup \quad \Rightarrow \quad ||u|| \leqslant c - const$;

е) $||u_n|| \leqslant c \quad \Rightarrow \quad \exists\ u_{n_k} \in U_{n_k}, u \in U :\ u_{n_k} - \rightharpoonup u$.

Определение 3.5. *Последовательность $\{A_{nm}\}$ операторов $A_{nm}\colon U_n \to F_m$ дискретно (дискретно слабо) сходится к оператору $A\colon U \to F$, если $u_n - \to u$ ($u_n - \rightharpoonup u$) влечет $A_{nm} - \to Au$ ($A_{nm} - \rightharpoonup Au$) при $n, m \to \infty$.*

Определение 3.6. *Совокупность $R = \{r_n\}$, $r_n\colon U_n \to U$ называется семейством сильных (слабых) операторов восполнения, если для любого $n = 1, 2, \ldots$ оператор r_n линейный ограниченный и выполнено соотношение*

$$u_n - \to u \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ||r_n u_n - u|| = 0$$

$$(u_n - \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad r_n u_n \rightharpoonup u, \quad \text{т. е. слабо в } U).$$

Известное определение Моско-сходимости [16] для множеств, принадлежащих одному и тому же пространству, можно обобщить на случай дискретной сходимости.

Определение 3.7. [16] *Последовательность множеств* $\{M_n\}$ *сходится дискретно в смысле Моско к множеству* M, *если выполнены условия:*

1) $\forall\ u \in M\ \exists\ u_n \in M_n: \quad u_n - \to u$;

2) $\forall\ \{u_{n_k}\},\ u_{n_k} \in M_{n_k}: \quad u_{n_k} - \rightharpoonup u \ \Rightarrow\ u \in M$.

Здесь $M_n \subset U_n$, $\{U_n\}$ образует дискретную аппроксимацию пространства U.

Поставим в соответствие бесконечномерной задаче

$$\min\{\|Au - f\|^2 :\ u \in M\} = d \tag{3.2}$$

последовательность конечномерных (дискретных) задач

$$\min\{\|A_n u_n - f_n\|^2 :\ u_n \in M_n\} = d_n, \tag{3.3}$$

где $A_n\colon U_n \to F_n$; $f_n \in F_n$; M_n – подмножество конечномерного пространства U_n. Заметим, что в общем случае U_n не является подпространством U, U_n – различные гильбертовы пространства, каждое со своим скалярным произведением и, следовательно, нормой. Кроме того, пространства U_n и F_n могут иметь разные размерности.

Теорема 3.2. *Пусть* $A\colon U \to F$, $A_n\colon U_n \to F_n$ *– линейные непрерывные операторы,* $M \subset U$, $M_n \subset U_n$ *– выпуклые компактные подмножества,* Q, Q_n *– множества квазирешений для задач* (3.2), (3.3) *соответственно. Пусть* $\{U_n\}$ ($\{F_n\}$) *образует дискретную аппроксимацию* U (F) *с помощью операторов* $\{p_n\}$ ($\{q_n\}$) *и выполнены следующие условия:*

1) $A_n - \to A$, $A_n - \rightharpoonup A$;

2) $f_n - \to f$;

3) *последовательность* $\{M_n\}$ *сходится к* M *дискретно в смысле Моско и равномерно ограничена;*

4) $\{r_n\}$ *образует семейство слабых операторов восполнения таких, что* $r_n M_n \subseteq M$.

Тогда

$$\beta(r_n Q_n, Q) = \sup_{u_n \in Q_n} \inf_{u \in Q} \|r_n Q_n - Q\| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Так как A, A_n непрерывны, а множества M, M_n компактны, то задачи (3.2), (3.3) разрешимы и множества Q, Q_n непусты. Предположим, что

$$\beta(r_n Q_n, Q) \not\to 0. \tag{3.4}$$

Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется подпоследовательность $r_{n_k}\widehat{u}_{n_k} \notin O_\varepsilon(Q)$, где $O_\varepsilon(Q)$ – ε-окрестность множества Q, $\widehat{u}_{n_k} \in Q_{n_k}$. Ввиду равномерной ограниченности множеств M_n и свойства е) дискретной слабой сходимости, существует подпоследовательность $\{\widehat{u}_{\overline{n}_k}\} \subseteq \{\widehat{u}_{n_k}\}$, дискретно слабо сходящаяся к некоторому элементу $\widehat{u} \in U$, причем в силу условия 3) теоремы $\widehat{u} \in M$.

Покажем, что $\widehat{u} \in Q$. Действительно, возьмем некоторое квазирешение $\overline{u} \in Q \subseteq M$. Тогда из определения дискретной Моско-сходимости следует существование последовательности $\{\overline{u}_n\}$, $\overline{u}_n \in M_n$, которая дискретно сходится к $\overline{u}$.

На основании свойств а)–е) дискретной сходимости и условий теоремы имеем цепочку неравенств

$$d \leqslant \|A\widehat{u} - f\| \leqslant \lim_{k\to\infty} \inf \|A_{\overline{n}_k}\widehat{u}_{\overline{n}_k} - f_{\overline{n}_k}\| = \lim_{k\to\infty} \inf d_{\overline{n}_k} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \|A_{\overline{n}_k}\overline{u}_{\overline{n}_k} - f_{\overline{n}_k}\| = \|A\overline{u} - f\| = d,$$

откуда заключаем, что $\widehat{u}$ – квазирешение исходной задачи, т. е. $\widehat{u} \in Q$.

Итак, $\widehat{u}_{\overline{n}_k} \in Q_{\overline{n}_k}$ и $\widehat{u}_{\overline{n}_k} - \rightharpoonup \widehat{u} \in Q$. Для семейства $\{r_n\}$ слабых операторов восполнения имеем $r_{\overline{n}_k}\widehat{u}_{\overline{n}_k} \to \widehat{u}$ слабо в U. Из компактности вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \|r_{\overline{n}_k}\widehat{u}_{\overline{n}_k} - \widehat{u}\| = 0,$$

что противоречит предположению (3.4).

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Если M, M_n – слабо компактные множества, то все дискретно слабо предельные точки последовательности $\widehat{u}_n$ решений задачи* (3.3) *являются решениями задачи* (3.2).

Следствие 3.2. *Если задачи* (3.2) *и* (3.3) *имеют единственные решения $\widehat{u}$, $\widehat{u}_n$ соответственно, то вместо β-сходимости имеем обычную сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} \|r_n\widehat{u}_n - \widehat{u}\| = 0$$

в пространстве U. Для этого достаточно, чтобы существовали обратные операторы A^{-1}, A_n^{-1}.

Пример 3.1. *Квадратурный метод аппроксимации.* Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Au \equiv \int_0^1 K(t,s)u(s)\,ds = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{3.5}$$

где $K(t,s)$ – непрерывная по совокупности переменных функция, оператор A действует из $L_2[0,1]$ в $L_2[0,1]$.

Для построения аппроксимирующего оператора A_n введем по s и t равномерную сетку с шагом h и привлечем квадратурную формулу правых прямоугольников для дискретизации интегрального оператора. Приходим к аппроксимирующей системе

$$\sum_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u(s_j) = f(t_i), \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

поэтому оператор A_n определяется матрицей с коэффициентами $a_{ij} = hK(t_i,s_j)$, а f_n – вектор с компонентами $(f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n))$.

Полагаем $U_n = \ell_2^n$, где ℓ_2^n – евклидово пространство с нормой

$$\|u_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} h|u_{n_i}|^2.$$

Операторы $p_n u = q_n u = (u(t_1), u(t_2), \ldots, u(t_n))$ сноса на сетку примем за связывающие операторы между $U = L_2[0,1]$ и $U_n = \ell_2^n$.

В качестве компактного множества возьмем

$$M = \{u: \; u \in W_2^1[0,1], \; \|u\|^2_{W_2^1} \leqslant R^2\},$$

а в качестве аппроксимирующего его множества

$$M_n = \left\{ u_n: \; u_n \in \ell_2^n, \; \|u\|^2_{w_2^{1n}} = \sum_{i=1}^{n} h|u_{n_i}|^2 + \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{u_{n_i} - u_{n_{i-1}}}{h}\right)^2 \right\}.$$

Убедимся, что выполнены все предположения теоремы 3.1. Доказательство свойств a)–e) можно найти в [13–15], а условия 1) теоремы – в [9, 17, 18]. Поскольку $f_n = p_n f$, то условие 2) очевидно выполнено.

Займемся проверкой условий 3)–4). Пусть $u \in M$, т. е. $\|u\|_{W_2^1} \leqslant R$. Так как бесконечно дифференцируемые функции плотны в W_2^1, то для каждого $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, найдется функция u^k из этого класса такая, что

$$\|u - u^k\|_{W_2^1} < \varepsilon_k, \quad \|u_N^k\|_{w_2^{1,N}} \leqslant R_N^k < R \quad \text{при} \quad N \geqslant n_k,$$

где u_N^k – сеточная функция, построенная по u_k, откуда $\|u - u^k\|_{C[0,1]} \leqslant c\varepsilon_k$, $c - const$. Определим при $n \geqslant n_k$ последовательность векторов $\widehat{u}_n$, где при номере n, удовлетворяющем неравенствам $n_k \leqslant n < n_{k+1}$,

$$\widehat{u}_n = (u^k(t_1), u^k(t_2), \ldots, u^k(t_n)).$$

Тогда имеем по построению $\widehat{u}_n \in M_n$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\widehat{u}_n - p_n u\|^2_{\ell_2^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} h|u^k(t_i) - u(t_i)|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} (c\varepsilon_k)^2 = 0,$$

т. е. $\widehat{u}_n \in M_n$ дискретно сходится к функции $u \in M$.

Рассмотрим теперь условие 2) в определении дискретной Моско-сходимости. Пусть $u_{n_k} \rightharpoonup \overline{u}$, т. е. дискретно слабо сходится для пространств L_2, ℓ_2^n. Известно, что с помощью того же семейства операторов p_n сноса на сетку последовательность пространств $w_2^{1,n}$ с нормой

$$\|u_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |u_{n_i}|^2 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left| \frac{u_{n_i} - u_{n_{i-1}}}{h} \right|^2$$

($\{\mu_i\}$ –коэффициенты формулы трапеций) образует дискретную аппроксимацию пространства Соболева W_2^1. Так как $u_{n_k} \in M_{n_k}$, то $\|u_{n_k}\|_{w_2^{1,n}} \leqslant R$. На основании свойства е) $\{u_{n_k}\}$ дискретно слабо компактна, поэтому для некоторой $\{\overline{n}_k\} \subseteq \{n_k\}$

$$u_{\overline{n}_k} \rightharpoonup \overline{\overline{u}},$$

т. е. дискретно слабо сходится относительно пространств W_2^1, $w_2^{1,n}$. Ввиду свойства г)

$$\|\overline{\overline{u}}\|_{W_2^1} \leqslant \lim_{k\to\infty} \inf \|u_{\overline{n}_k}\|_{w_2^{1,n}} \leqslant R,$$

т. е. $\overline{\overline{u}} \in M$, что и требовалось установить.

Покажем теперь, что элементы $\overline{u}$ и $\overline{\overline{u}}$ совпадают. Действительно, операторы $r_n : w_2^{1,n} \to W_2^1$ кусочно-линейного восполнения образуют семейство слабых операторов восполнения (см. [17]), т. е.

$$r_{n_k} u_{\overline{n}_k} \rightharpoonup \overline{\overline{u}},$$

что влечет $\lim\limits_{k\to\infty} \|r_{\overline{n}_k} u_{\overline{n}_k} - \overline{\overline{u}}\|_C = 0$, а следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\overline{n}_k} h_i |u_{\overline{n}_k, i} - \overline{\overline{u}}(t_i)| = 0,$$

т. е. $u_{\overline{n}_k} \to \overline{\overline{u}}$, в силу единственности предела это влечет $\overline{u} = \overline{\overline{u}}$.

Пример 3.2. *Проекционный метод.* Рассмотрим операторное уравнение (1.1), в частности уравнение (3.5) на паре гильбертовых пространств U, F. Зададим последовательность вложенных конечномерных пространств $\{U_n\} \subseteq U$, $\{F_n\} \subseteq F$ таких, что $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n} = U$, $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n} = F$. В качестве связывающих операторов возьмем семейства ортогонального проектирования $\{p_n\}$, $p_n\colon U \to U_n$, $\{q_n\}$, $q_n\colon F \to F_n$.

Аппроксимирующие операторы имеют вид $A_n = q_n A p_n$, $f_n = q_n f$. Априорное множество M и аппроксимирующее его множество M_n зададим в форме

$$M = \{u : \ u = Bv, \ v \in V, \ ||v|| \leqslant R\},$$

$$M_n = \{u_n : \ u_n = Bv_n, \ v_n \in V_n, \ ||v_n|| \leqslant R\},$$

где V – гильбертово пространство, а $\{V_n\}$ – семейство его конечномерных подпространств, $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n} = V$, B – линейный вполне непрерывный оператор, действующий из V в U.

Нетрудно проверить, что порождаемая операторами $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ дискретная (дискретная слабая) сходимость совпадает с сильной (слабой) сходимостью (см. [9]). Поэтому все условия теоремы 3.1 в этом случае легко проверяются.

Замечание 3.1. При условии $q_n = I$ – тождественный оператор и $U_{n+1} \subset U_n$ мы находимся в условиях теоремы 3.1 и следствий 3.1 и 3.2.

Пример 3.3. *Метод коллокаций.* Рассмотрим интегральное уравнение (3.5) в пространстве $L_2[0,1]$. Пусть U_n – последовательность конечномерных подпространств. Последовательность ортогональных проекторов $\{p_n\}$ примем за связывающие операторы между $U = L_2[0,1]$ и U_n, а сеточные операторы $q_n\colon f(t) \to (y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_n))$ – между $F = L_2[0,1]$ и пространством $F_m = \ell_2^n$ с нормой

$$||f_n||^2 = \sum_{i=1}^{n} h|f_{n_i}|^2.$$

Аппроксимирующие операторы $A_n\colon U_n \to F_n$ определим для $u_n \in U_n$ формулой

$$(A_n u_n)_i = \int_0^1 K(t_i, s) u_n(s)\, ds.$$

Определим выпуклое компактное множество M в виде

$$M = \{u \in U : \quad ||Lu|| \leqslant R\},$$

где L – линейный замкнутый оператор, действующий в пространстве $L_2[0,1]$; за аппроксимирующие множества примем $M_n = p_n M$.

Доказательство условия 1) теоремы 3.1 о дискретной сходимости $A_n - \to A$, $A_n - \rightharpoonup A$ содержится в [9, 17], а все остальные условия, как и в предыдущем примере, проверяются вполне просто.

Литература

1. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 270–272.
2. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах // Матем. сб. 1963. Т. 61(103), № 2. С. 211–223.
3. Домбровская И. Н., Иванов В. К. К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6, № 3. С. 499–508.
4. Иванов В. К. Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах // Там же. Т. 4, № 4. С. 832–839.
5. Иванов В. К. Некорректные задачи в топологических пространствах // Там же. 1969. Т. 10, № 5. С. 1065–1074.
6. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
7. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // Там же. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
8. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
9. Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993.
10. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
11. Browder F. E. Convergence of approximantes to fixed point of non-expansive nonlinear maps in Banach spaces // Arch. Ration. Mech. Anal. 1967. Vol. 24, № 1. P. 82–90.
12. Halperin B. Fixed points of nonexpansive maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, № 6. P. 957–961.
13. Stummel F. Discrete Konvergentz linearer Operatoren 1, 2 // Math. Ann. 1970. Bd. 190, № 1. S. 45–92; Math. Z. 1971. Bd. 120, № 2. S. 230–264.
14. Grigorieff R. D. Zur Teorie Approximations regularer Operatoren 1, 2 // Math. Nachr. 1973. Bd. 55, № 3. S. 233–249, 251–263.

15. Вайникко Г. М. Анализ дискретизованных методов. Тарту: Изд-во Тартус. ун-та, 1976.

16. Mosco U. Convergence of convex sefs and of solutions of variational inequalities // Adv. Math. 1969. Vol. 3, № 4. P. 510–585.

17. Васин В. В. Дискретизация, итерационно-аппроксимационные алгоритмы решения неустойчивых задач и их приложения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1985.

18. Васин В. В. Общая схема дискретизации регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 2. С. 271–275.

Статья поступила 08.01.2008 г.
Окончательный вариант 07.03.2008 г.